कक्षा से

स्कूली बीजगणित में ‘संयुग्मन’ की त्रुटि

के. सुब्रमण्यम

मुख्य शब्द : *बीजगणित, त्रुटि विश्लेषण, संज्ञान, दृश्यस्थानिक (Visuospatial), व्यंजक, समानता, सरलीकरण, BODMAS*

कई बच्चे जो अंकगणित में काफ़ी हद तक कुशल होते हैं, वे स्कूली बीजगणित में बड़ी कठिनाइयों का सामना करते हैं। इसके चलते उनके प्रदर्शन में लगातार और बड़े स्तर पर कमी आ सकती है और अन्ततः वे गणित छोड़ सकते हैं। इससे प्रभावी ढंग से निपटने के लिए पहला क़दम यह समझना है कि यह कठिनाइयाँ क्यों होती हैं। फिर उसके अनुरूप शिक्षण में बदलाव किए जाने चाहिए। यदि बच्चों को इन कठिनाइयों से उबरने में मदद की जाए, तो इससे कुछ बच्चों को गणित छोड़ने या विज्ञान जैसे विषयों (जिनमें गणित की आवश्यकता होती है) से दूर होने से बचाया जा सकता है। यह लेख बीजगणित में होने वाली एक विशेष त्रुटि (जो कि काफ़ी आम है) के सम्भावित कारणों पर संक्षेप में चर्चा करता है। हालाँकि हमारा ध्यान सिर्फ़ एक विशेष त्रुटि पर है, लेकिन इसका विश्लेषण करने से बीजगणित के उन गहन मुद्दों के बारे में भी जानकारी मिलती है, जिसमें बच्चों को समस्या है। हमारी चर्चा गणित-शिक्षा में बीजगणित सीखने पर हुए शोध पर आधारित है। भारत सहित दुनिया भर में कई स्थानों पर किए गए इस तरह के शोध न केवल बच्चों द्वारा की जाने वाली विभिन्न प्रकार की त्रुटियों का विश्लेषण करते हैं, बल्कि बीजगणित-शिक्षण के बेहतर तरीक़े भी विकसित करते हैं। इस शोध पर चर्चा को इस लेख में शामिल करना काफ़ी लम्बा होगा। हालाँकि, हम यहाँ पर उन लेखों के सन्दर्भ दे रहे हैं जो बीजगणित-शिक्षण के लिए ऐसे ही एक दृष्टिकोण के बारे में बताते हैं, जो होमी भाभा केन्द्र में विकसित किया गया था।

संयुग्मन त्रुटि (Conjoining Error)

संयुग्मन त्रुटि बीजीय व्यंजकों को सरल करने के कार्य की प्रतिक्रिया के रूप में देखी जाती है। उदाहरण के लिए इन दो वाक्यों को देखें :

1) $5 + 2a = 7a^*$ 2) $5a + 2b = 7ab^*$

(दाईं ओर लगा एस्ट्रिक इस बात को इंगित करता है कि जवाब ग़लत है।)

कई शिक्षक इसे उन सबसे ज़्यादा की जाने वाली त्रुटियों में से एक के रूप में पहचानते हैं जो वे बच्चों के काम में देखते हैं। "संयुग्मन त्रुटि" से तात्पर्य दो पदों को ग़लत ढंग से जोड़ने से है। आगे बढ़ने से पहले, हमें यह स्पष्ट करना चाहिए कि यह दोनों वाक्य वास्तव में ग़लत *नहीं* हैं, यदि इन्हें सर्वसमिकाओं के बजाय समीकरणों के रूप में समझा जाए। यदि वाक्य 1 को एक समीकरण के रूप में समझा जाए तो यह सही होगा जब $a = 1$ हो। इसी तरह वाक्य 2 फलन $b = 5a/(7a\text{-}2)$, जहाँ पर $a \neq 2/7$ है, द्वारा प्राप्त a और b के सभी जोड़ों के लिए, सही होगा। यह वाक्य ग़लत तभी होते हैं जब इन्हें सर्वसमिकाओं (यानी ऐसा वाक्य जो चर के सभी मानों के लिए सत्य हो) के रूप में समझा जाता है। बाईं ओर के व्यंजक का दाईं ओर के व्यंजक के रूप में सरलीकरण केवल तभी सम्भव है जब बायाँ पक्ष (LHS), दाएँ पक्ष (RHS) के एकदम बराबर हो।

यदि आप एक शिक्षक हैं तो आप इस त्रुटि से कैसे निपटेंगे? इसके लिए बार-बार दिए जाने वाला एक सुझाव यह है कि हमें 'समान' पदों (like terms) की अवधारणा पर ज़ोर देना चाहिए। आप समान पदों को जोड़ सकते हैं ठीक वैसे ही जैसे आप सेब से सेब को जोड़ सकते हैं, लेकिन केले में सेब नहीं जोड़ सकते हैं। पर इसे याद रखना बहुत मुश्किल है, ख़ासकर तब जब हमारा सामना ऊपर उदाहरण 2 में दिए गए जैसे वाक्य से होता है। कोई बच्चा सोच सकता है कि 7 फल (जो कि सेब और केले हैं) पाने के लिए हम हमेशा एक टोकरी में 5 सेब और 2 केले एक साथ रख सकते हैं। इसलिए बच्चे $5a + 2b = 7ab^*$ जवाब देते हैं, और 'फलों का सलाद' वाला बीजगणित विफल हो जाता है। इसके अलावा, बच्चे को यह सोचने के लिए प्रेरित करना और भी ज़्यादा गम्भीर ग़लतफ़हमी है कि व्यंजक में 'a' का मतलब एक संख्या न होकर कोई चीज़ जैसे कि सेब है।

त्रुटि के बारे में सोचने का एक और तरीक़ा यह देखना है कि क्या अंकगणित में इसका कोई प्रतिस्थानी (counterpart) है या नहीं। वास्तव में हम उदाहरण 1 का एक प्रतिस्थानी प्राप्त कर सकते हैं, जो नीचे (1a) में प्रस्तुत किया गया है, लेकिन उदाहरण 2 के लिए एक प्रतिस्थानी के बारे में सोचना मुश्किल है।

1) $5 + 2a = 7a^*$

1a) $5 + 2 \times 3 = 7 \times 3 = 21^*$

(1a) में त्रुटि यह है कि इसमें संक्रियाओं के क्रम की परिपाटी या BODMAS नियम टूट गया है। चूँकि बीजगणितीय वाक्य में त्रुटि अंकगणितीय त्रुटि के समान ही दिखती है, इसलिए कोई यह सोच सकता है कि इससे निपटने का सही तरीक़ा बच्चों को BODMAS नियम की याद दिलाना और उन्हें इसे लागू करने का अभ्यास कराना है। जैसा कि हम देखेंगे, (1) और (1a)

में त्रुटियों के अन्तर्निहित कारण बहुत भिन्न हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में, हालाँकि (1) और (1a) में हुई त्रुटि *गणितीय* रूप से समान हैं, परन्तु *संज्ञानात्मक* पहलू (जो त्रुटियों का कारण बनते हैं) बहुत भिन्न हो सकते हैं।

आइए पहले, हम इस बारे में विचार करें कि संक्रियाओं के क्रम का नियम क्यों सिखाया जाता है। कई गणितज्ञ यह कह सकते हैं कि ऐसा नियम अनावश्यक है। वास्तव में, (1a) में बाएँ पक्ष का व्यंजक अस्पष्ट है क्योंकि हमने कोष्ठक नहीं लगाए हैं। हम दो अलग-अलग मान प्राप्त करने के लिए कोष्ठक को दो तरीक़ों से लगा सकते हैं :

(5 + 2) x 3 = 7 x 3 = 21 **या** 5 + (2 x 3) = 5 + 6 = 11

एक बार जब हम कोष्ठक लगा देते हैं, तो यह दोनों ही सही होते हैं। इसलिए गणितीय रूप से सही यह होगा कि जब भी हमारे पास दो या दो से अधिक द्विआधारी संक्रियाएँ (binary operations) एक ही व्यंजक में हों, तो हमें कोष्ठक लगाना चाहिए। अन्यथा, व्यंजक अस्पष्ट होगा, सिवाय इसके कि सभी द्विआधारी संक्रियाएँ योग या गुणन की हों। इस स्थिति में कोष्ठक लगाने के विभिन्न तरीक़े एक ही परिणाम देते हैं।

(5 + 2) + 3 = 5 + (2 + 3) = 10 और

(5 x 2) x 3 = 5 x (2 x 3) = 30

यह, निश्चित रूप से, गुणन व योग के साहचर्य गुणधर्म के कारण होता है।

उपरोक्त को ध्यान में रखते हुए यह स्पष्ट है कि BODMAS या संक्रियाओं के क्रम का कोई अन्य नियम एक परिपाटी है जो *कोष्ठक नहीं लगाने पर भी* हमें कई द्विआधारी संक्रियाओं वाले एक व्यंजक को समझने की अनुमति देती है। (संयोग से, जब BODMAS नियम को 30 − 10 + 10 जैसे व्यंजक पर विधिपूर्वक लागू किया जाता है, तो यह त्रुटि का कारण बनता है क्योंकि यह बताता है कि जोड़ को घटाव से पहले किया जाना चाहिए। परिपाटी के रूप में, 'BODMAS' की तुलना में 'BODMSA' अधिक भरोसमन्द है।) हमें इस तरह की परिपाटी की आवश्यकता क्यों है? सभी संख्यात्मक व्यंजकों के लिए केवल कोष्ठक क्यों नहीं लगाए जाते और ऐसे नियमों से छुटकारा क्यों नहीं पा लिया जाता जिन्हें याद रखना और सही तरीक़े से लागू करना बच्चों के लिए वैसे भी मुश्किल है? यह प्रस्ताव सोचने लायक है।

ऐसा प्रतीत होता है कि BODMAS जैसे नियम को सिखाने का वास्तविक कारण यह है कि यह बच्चों को बीजीय व्यंजकों के साथ काम करने और उन्हें समझने के लिए तैयार करता है। बीजीय व्यंजकों को सरल करने और हल करने के नियम विफल हो जाएँगे यदि चरों को संख्याओं से प्रतिस्थापित करने के बाद व्यंजकों का एक निश्चित और स्पष्ट मान नहीं होता है।

व्यंजक को स्पष्ट बनाने के लिए बहुत सारे कोष्ठक लगाने के सुझाव के बारे में आपको क्या लगता है? बीजीय व्यंजकों में कोष्ठक लगाने से उन्हें पढ़ने और समझने में कठिनाई होती है और इसलिए हमें कोष्ठक का उपयोग कम-से-कम करना चाहिए। बेशक, BODMAS नियम बीजीय व्यंजकों पर भी लागू होता है और संख्यात्मक व्यंजकों की तरह इसमें भी गुणन की संक्रिया को जोड़ और घटाव से पहले प्राथमिकता दी जाती है। हालाँकि, बीजीय व्यंजकों को पदों में विभक्त करते समय शायद ही कभी BODMAS नियम लागू किया जाता है। ऐसा इसलिए है क्योंकि किस संक्रिया को प्राथमिकता देनी है इसका पता लगाने के लिए बीजीय व्यंजकों में दृश्यस्थानिक (visuospatial) और पढ़ने की परिपाटी का उपयोग किया जाता है कि किस संक्रिया को प्राथमिकता देनी है। उदाहरण के लिए, जोड़ या घटाव पर गुणन संक्रिया को प्राथमिकता देने के लिए बीजीय व्यंजकों को लिखने और पढ़ने दोनों में गुणन संक्रिया के चिह्न को छोड़ दिया जाता है। घातांकों को लिखने (और पढ़ने) की परिपाटी दूसरी संक्रियाओं पर इसकी प्राथमिकता का संकेत देती है। ध्यान दें कि यह परिपाटियाँ संख्यात्मक व्यंजकों के लिए इस्तेमाल की जाने वाली BODMAS परिपाटी से बहुत अलग हैं। इसलिए यह सम्भव नहीं है कि BODMAS नियम का उल्लंघन, जो ऊपर (1a) में त्रुटि का कारण है, वह उदाहरण (1) में भी त्रुटि का कारण हो। इसके अलावा, भले ही कोई बच्चा BODMAS नियम को कितनी ही अच्छी तरह से क्यों न जानता हो, संख्या के बजाय चर की उपस्थिति के कारण वह उदाहरण (1) में दिए गए व्यंजक को सरल करने के लिए इस नियम का उपयोग नहीं कर सकता है। इस प्रकार, चरों की उपस्थिति संक्रियाओं के क्रम के नियमों के उपयोग में बाधा डालती है और उनकी उपयोगिता को सीमित करती है।

BODMAS परिपाटी और बीजगणितीय व्यंजकों के लिए परिपाटियों के बीच एक ध्यान देने योग्य अन्तर भी है। पहला नियम आक्षरिक है जो बताता है कि कौन-सी संक्रिया किसके पहले आती है। याद रखने में सहायता के लिए संक्रियाओं के शुरुआती अक्षरों को जोड़कर यह संक्षिप्त रूप बनाया गया है। इसके विपरीत, बीजीय व्यंजकों के लिए परिपाटियाँ दृश्यस्थानिक हैं और लिखने के तरीक़ों पर आधारित हैं। यह बताता है कि BODMAS नियम के साथ काम करने से बीजीय व्यंजकों को सही ढंग से पदों में विभक्त करना सीखने में बहुत मदद नहीं मिल सकती। क्या दोनों प्रकार के व्यंजकों को पदों में विभक्त करने के लिए समान परिपाटियों का उपयोग करके संख्यात्मक और बीजीय व्यंजकों के साथ काम करना सम्भव है? वास्तव में, संख्यात्मक व्यंजकों के साथ काम करने का एक तरीक़ा जो उपयुक्त नामकरण द्वारा समर्थित "पदों" को दृश्य रूप से विभक्त करने का उपयोग करता है, अंकगणित और बीजगणित के बीच की खाई को पाटने में मददगार पाया गया है (बनर्जी और सुब्रमण्यम, 2012)।

आइए अब हम संयुग्मन त्रुटि पर वापिस चलते हैं। बच्चे यह त्रुटि क्यों करते हैं इसके प्रस्तावित स्पष्टीकरणों में से एक यह है कि वे उत्तर के रूप में "खुले व्यंजकों" (unclosed expressions) को स्वीकार नहीं कर पाते हैं। दूसरे शब्दों में, अंकगणित के उनके अनुभव उन्हें यह सोचने के

लिए प्रेरित करते हैं कि एक सरल दिखने वाले व्यंजक को "=" के चिह्न के दाईं ओर लिखा जाना चाहिए।

$5 + 2a = 5 + 2a$ या $5a + 2b = 5a + 2b$

जैसा कोई जवाब एक तरह की धोखाधड़ी– यानी प्रश्न को फिर से उत्तर के रूप में लिखना – लग सकता है क्योंकि दाईं ओर लिखा खुला व्यंजक "$5 + 2a$" उत्तर के बजाय एक प्रश्न की तरह दिखता है। इसके विपरीत, "बन्द" व्यंजक (closed expression) "$7a$", सघन और एक उत्तर की तरह लगता है। जवाबों के रूप में खुले व्यंजकों को स्वीकार करने की अनिच्छा वास्तव में एक प्रश्न को उत्तर के रूप में स्वीकार करने की बात को सामने लाती है, जो बीजीय सोच का मूल है! अर्थात हम उस व्यंजक को स्वीकार करते हैं जो की जाने वाली संक्रियाओं को दर्शाता है और साथ ही संक्रिया से प्राप्त होने वाले परिणाम को भी बताता है। इस प्रकार $5 + 2$ या $2 \times 3 + 1$ न केवल ऐसे व्यंजक हैं जो हमें कुछ ख़ास संक्रियाओं को करने के लिए कहते हैं, बल्कि उस उत्तर को (जो कि यहाँ पर संख्या 7 है) भी बताते हैं जो परिणाम के रूप में प्राप्त होता है। इस प्रकार $5 + 2a$ और $7a$ संख्याओं को बताते हैं, और जब दोनों व्यंजकों में a के समान मान का उपयोग किया जाता है तो सामान्य रूप से यह संख्याएँ समान नहीं होती हैं। यह देखना इस बात पर निर्भर करता है कि उदाहरण (1) या (2) में दिया गया वाक्य "=" के चिह्न के बाएँ और दाएँ पक्षों की संख्याओं के बराबर होने के बारे में है, संख्याएँ जो "चर" हैं वह a और b चरों के मान प्रतिस्थापित करने के बाद "स्थिर" हो जाती हैं। वास्तव में, अधिकांश बच्चे "="के चिह्न को चिह्न के दोनों ओर के व्यंजकों की समानता को बताने की बजाय किसी से "कुछ करने और उत्तर लिखने" के रूप में समझते हैं। "11 + 7 = _ + 9" जैसे किसी प्रश्न से सामना होने पर यह समझ त्रुटियों का कारण बनती है और बच्चे इसका जवाब "11 + 7 = 18 + 9 = 27*" दे सकते हैं। ऐसे बच्चों को यह भी लगता है कि "3 = 3" जैसे वाक्य में भारी गड़बड़ है।

पदार्थीकरण सिद्धान्त (reification principle)

किसी व्यंजक के परिणाम को एक व्यंजक के रूप में बताने को स्वीकार करने का बीजगणितीय सिद्धान्त, जिसे कभी-कभी "पदार्थीकरण सिद्धान्त" कहा जाता है, पहले से ही अंकगणित में उपयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, 5 को 7 से विभाजित करने पर इसे 5/7 के रूप में व्यक्त किया जाता है। सामान्यत: $a \div b = a / b$ लिखा जाता है, जो कि "उत्तर के रूप में प्रश्न को लिखने" के समान है। इसी तरह 2 (या किसी भी संख्या a) का वर्गमूल केवल $\sqrt{2}$ (या सामान्य रूप से $\sqrt{a}$) लिखा जाता है। यह बीजगणित का एक बहुत ही महत्त्वपूर्ण पहलू है जिस पर बच्चे आमतौर पर ध्यान नहीं देते हैं, और यदि शिक्षक इसे इंगित करते हैं तो इससे अत्यधिक मदद मिलती है। पदार्थीकरण सिद्धान्त को समझना उन्हें यह पहचानने की अनुमति देता है, उदाहरण के लिए, कि $(a + b)^2$ और $a^2 + 2ab + b^2$ एक ही संख्या (जब a व b को संख्याओं से प्रतिस्थापित किया जाता है) के लिए अलग-अलग व्यंजक हैं। यह उन्हें व्यंजकों को पढ़ने और समझने की अनुमति देता है, क्योंकि उनमें निरूपित की गई संख्या के बारे में जानकारी होती है। इस प्रकार, $48 + 47$, $45 + 45 + 3 + 2$, और $50 + 50 - 2 - 3$,

एक ही संख्या के लिए अलग-अलग व्यंजक हैं और इसीलिए समतुल्य हैं, परन्तु उन अलग-अलग तरीक़ों को बताते हैं जिनमें संख्या 95 को अन्य संख्याओं से 'रचा' गया है। (हमने एक व्यंजक द्वारा मिलने वाली जानकारी को सुब्रमण्यम और बनर्जी, 2011 में एक संख्या की *संक्रियात्मक संरचना* के रूप में वर्णित किया है।) 199 + 70 × 0.5 जैसा एक व्यंजक हमें बताता है कि सेलफ़ोन टैरिफ की गणना कैसे की जाती है। यह बताता है कि हर बार दी जाने वाली निर्धारित राशि 199 रुपए है और 0.5 रुपए प्रति मिनट की दर है। यहाँ तक कि संख्या सूचक शब्द "536", व्यंजक 5 × 100 + 3 × 10 + 6 का एक छोटा रूप है जो बहु-इकाइयों (जो दस की विभिन्न घातें हैं) के रूप में संख्या 536 की संक्रियात्मक संरचना को बताता है। व्यंजकों को इस तरीक़े से "पढ़ने" की क्षमता बीजगणित में महत्त्वपूर्ण है और इसके आधार के रूप में पदार्थीकरण सिद्धान्त की समझ आवश्यक है। फिर से हम बैनर्जी और सुब्रमण्यम (2012) का उल्लेख करते हैं जिसमें संख्यात्मक व्यंजकों के साथ काम करते हुए बीजीय व्यंजकों को ऊपर बताए गए तरीक़े से पढ़ने की क्षमता विकसित की जा सकती है।

References

1. Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies in Mathematics*. 80:351–367.
2. Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The arithmetic-algebra connection: A historical-pedagogical perspective. In Cai, J. & Knuth, E. (Eds). *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Springer, 87-107.
3. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही